Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέματα προαγωγικών εξετάσεων στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης

ΘΕΜΑ 1^{ο}

α) Να αποδείξετε ότι για δύο διανύσματα $\vec{a}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ με $\vec{\alpha},\vec{\beta} \not\parallel y'y$ ισχύει η ισοδυναμία: $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\lambda_1\lambda_2=-1$.

Μονάδες 15

β) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

i. Αν $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$

ii. Έστω τα σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$. Τότε οι συντεταγμένες του μέσου Μ θα είναι $\left(\frac{x_1-x_2}{2},\frac{y_1-y_2}{2}\right)$

iii. Έστω $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δύο διανύσματα με $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ και $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$ η προβολή του $\vec{\beta}$ πάνω στο $\vec{\alpha}$. Τότε ισχύει ότι $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}\,//\,\vec{\beta}$.

iv. Η εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ με $A\neq0$ ή $B\neq0$ παριστάνει ευθεία.

v. Η παραβολή $y^2=2px$ έχει διευθετούσα με εξίσωση $x=\frac{p}{2}$.

Μονάδες $5\times2=10$

ΘΕΜΑ 2^{Ο}

Δίνονται τα σημεία $A(-2,4)$, $B(3,2)$ και $\Gamma(1,-3)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$. Μονάδες 6

β) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$. Μονάδες 6

γ) Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$. Μονάδες 6

δ) Να βρείτε την προβολή του σημείου B στην ευθεία $A\Gamma$. Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3^{Ο}

Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon):4x+\lambda y+\lambda+4=0$ με $\lambda\neq0$ η οποία απέχει από το σημείο $M(0,2)$ απόσταση ίση με 1.

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda=-3$. Μονάδες 6

β) Να βρείτε σημείο του άξονα $x'x$ το οποίο ισαπέχει από το $\Lambda(2,-3)$ και την ευθεία (ε).

Μονάδες 9

γ) Θεωρούμε τα σημεία $A(\kappa,\mu)$, $B(-2\kappa,4-3\mu)$ και $\Gamma(5,2)$. Αν τα A,B ανήκουν στην ευθεία (ε), να υπολογιστεί το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4^{Ο}

Δίνονται οι κύκλοι $C_1:x^2+y^2=25$ και $C_2:25x^2+25y^2-100x-261=0$.

α) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη (ε) του κύκλου C_1 στο σημείο του $A(3,\lambda)$ με $\lambda>0$ είναι η ευθεία $3x+4y-25=0$. Μονάδες 7

β) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C_2. Μονάδες 5

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) είναι κοινή εφαπτομένη των δύο κύκλων.

Μονάδες 6

δ) Έστω B και Γ τα σημεία τομής του C_1 με τον άξονα $x'x$ με $x_B > 0$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων του καρτεσιανού επιπέδου που ισαπέχουν από την εφαπτομένη του C_1 στο Γ και από το σημείο B. Στη συνέχεια, να γράψετε την εξίσωση του προηγούμενου γεωμετρικού τόπου.

Μονάδες 7

Λύσεις

ΘΕΜΑ 1ο

α) Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$, $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$, τότε έχουμε:

$$\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0\Leftrightarrow y_1y_2=-x_1x_2\Leftrightarrow\frac{y_1}{x_1}\frac{y_2}{x_2}=-1\Leftrightarrow\lambda_1\lambda_2=-1$$

β) i. Σ **ii.** Λ **iii.** Λ **iv.** Σ **v.** Λ

ΘΕΜΑ 2ο

α) Είναι $\overrightarrow{AB}=(3+2,2-4)=(5,-2)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(1+2,-3-4)=(3,-7)$

β) $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{5^2+(-2)^2}=\sqrt{29}$, $|\overrightarrow{A\Gamma}|=\sqrt{3^2+(-7)^2}=\sqrt{58}$

γ) $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}})=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{A\Gamma}|}=\dfrac{5\cdot3-2(-7)}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{58}}=\dfrac{29}{\sqrt{29}\sqrt{2}\sqrt{29}}=\dfrac{\cancel{29}}{\cancel{29}\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow$

$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}})=45^\circ$

δ) Έστω Κ η προβολή του Β στην ΑΓ. Είναι $\lambda_{A\Gamma}=-\dfrac{7}{3}$ και

$B K\perp A\Gamma\Leftrightarrow\lambda_{BK}\lambda_{A\Gamma}=-1\Leftrightarrow\lambda_{BK}=\dfrac{3}{7}$.

Η ΒΚ έχει εξίσωση: $y-2=\dfrac{3}{7}(x-3)\Leftrightarrow y=\dfrac{3}{7}x+\dfrac{5}{7}$

Η ευθεία ΑΓ έχει εξίσωση: $y+3=-\dfrac{7}{3}(x-1)\Leftrightarrow y=-\dfrac{7}{3}x-\dfrac{2}{3}$

Από το σύστημα των ΒΚ, ΑΓ προκύπτει $x=-\dfrac{1}{2}$ και $y=\dfrac{1}{2}$, άρα $K\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

ΘΕΜΑ 3ο

α) $d(M,\varepsilon)=1\Leftrightarrow\dfrac{|2\lambda+\lambda+4|}{\sqrt{4^2+\lambda^2}}=1\Leftrightarrow|3\lambda+4|=\sqrt{4^2+\lambda^2}\Leftrightarrow(3\lambda+4)^2=4^2+\lambda^2\Leftrightarrow$

$9\lambda^2+24\lambda+\cancel{16}=\cancel{16}+\lambda^2\Leftrightarrow8\lambda^2+24\lambda=0\Leftrightarrow8\lambda(\lambda+3)=0\Leftrightarrow\lambda=0$ απορρίπτεται ή $\lambda=-3$

β) Για $\lambda=-3$ είναι $(\varepsilon):4x-3y+1=0$

Έστω $K(x,0)$. Πρέπει $(K\Lambda)=d(K,\varepsilon)\Leftrightarrow\sqrt{(x-2)^2+3^2}=\dfrac{|4x-3\cdot0+1|}{\sqrt{4^2+3^2}}\Leftrightarrow$

$\sqrt{(x-2)^2+3^2}=\dfrac{|4x+1|}{5}\Leftrightarrow(x-2)^2+9=\dfrac{(4x+1)^2}{25}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow$

$x^2-12x+36=0\Leftrightarrow(x-6)^2=0\Leftrightarrow x=6$, άρα $K(6,0)$

γ) Επειδή τα Α,Β ανήκουν στην ε, ισχύει ότι:

$$\begin{cases} 4\kappa-3\mu+1=0 \\ -8\kappa-3(4-3\mu)+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\kappa-3\mu=-1 \\ -8\kappa+9\mu=11 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \begin{cases} \kappa=2 \\ \mu=3 \end{cases}$$

Τότε A(2,3) και B(- 4, - 5)

$\overrightarrow{AB}=(-4-2,-5-3)=(-6,-8)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(5-2,2-3)=(3,-1)$

Είναι $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)=\begin{vmatrix} -6 & -8 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=6+24=30$ και $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|=15$

ΘΕΜΑ 4^{o}

α) Το σημείο A ανήκει στον C_1 άρα $3^2+\lambda^2=25 \overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow} \lambda=4$

Η εφαπτομένη του C_1 στο A είναι η ευθεία $(\varepsilon): x\cdot 3+y\cdot 4=25 \Leftrightarrow 3x+4y-25=0$

β) $C_2: 25x^2+25y^2-100x-261=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-4x=\frac{261}{25} \Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2=\frac{261}{25}+4 \Leftrightarrow$

$(x-2)^2+y^2=\frac{361}{25}=\left(\frac{19}{5}\right)^2$, άρα ο C_2 έχει κέντρο $K(2,0)$ και ακτίνα $\rho_2=\frac{19}{5}$.

γ) Αρκεί $d(K,\varepsilon)=\rho_2$

$$d(K,\varepsilon)=\frac{|3\cdot 2+4\cdot 0-25|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{19}{5}=\rho_2$$

δ) Για $y=0$ είναι $x^2=25 \Leftrightarrow x=\pm 5$, άρα B(5,0) και Γ(- 5, 0)

Έστω M(x,y) τα σημεία του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου.

Η εφαπτομένη του C_1 στο Γ είναι η $\varepsilon': x=-5$.

Επειδή ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από σταθερό σημείο και σταθερή ευθεία είναι παραβολή, ο γεωμετρικός τόπος του M είναι παραβολή με εστία το B και διευθετούσα την ε΄. Είναι $\frac{p}{2}=5 \Leftrightarrow p=10 \Leftrightarrow 2p=20$, άρα η παραβολή έχει εξίσωση $y^2=20x$.

Στέλιος Μιχαήλογλου – Δημήτρης Πατσιμάς